ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

[illegible]

σ $E \to E$ μερική διάταξη αν είναι
- αυτοπαθής/ανακλαστική
- αντισυμμετρική
- μεταβατική

$\alpha \leq \beta$: α προηγείται του β
β έπεται του α

$(E, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο

Παραδείγματα

1) $(\mathbb{R}, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο

2) $(P(E), \subseteq)$
$(E \neq \emptyset)$

Πράγματι, • $\forall X \in P(E)$
$X \subseteq X$. άρα η $\subseteq$ είναι ανακλαστική

• $X, Y \in P(E)$ με $\left.\begin{matrix} X \subseteq Y \\ Y \subseteq X \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = Y$
δηλαδή $\subseteq$ αντισυμμετρική

• $\left.\begin{matrix} X \subseteq Y \\ Y \subseteq Z \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \subseteq Z$
άρα $\subseteq$: μεταβατική.

Άρα, $\subseteq$ διάταξη

3) σ στο $\mathbb{N}^2$: $\sigma := \{(x,y) \cdot x | y\}$

πχ $= \{(1,1), (1,2) \ldots \}$

$= \{(2,2), (2,4), (2,6) \ldots \}$

$= \{(3,3), (3,6), (3,9) \ldots \}$

i) $\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow x|x \Rightarrow (x,x) \in G$
$\rightsquigarrow$ G: αναπλαστική

ii) Για $\left.\begin{matrix}(x,y)\in G\\(y,x)\in G\end{matrix}\right\}$ τότε $\left.\begin{matrix}x|y\\y|x\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x=y}$
$\rightsquigarrow$ G: αντισυμμετρική

iii) Για $\begin{matrix}(x,y)\in G\\(y,z)\in G\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}x|y\\y|z\end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\exists\, k\in\mathbb{N}: y=kx\\ \exists\, \lambda\in\mathbb{N}: z=\lambda y\end{matrix}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow z=(k\lambda)\cdot x \quad , \; k,\lambda\in\mathbb{N} \Rightarrow k\lambda\in\mathbb{N}$
$(x,z)\in G$
$\rightsquigarrow$ G: μεταβατική.

(4) άσκηση
$\leq$ στο $\mathbb{R}^2$

$(x,y)\leq(z,w)$ αν $x=z \wedge y\leq w$

ανακλαστική: $(x,y)\leq(x,y)$
αντισυμμετρική: $\left.\begin{matrix}(x,y)\leq(z,w)\\ \kappa' \quad (z,w)\leq(x,y)\end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix}x=z\\z=x\end{matrix} \; , \; \begin{matrix}y\leq w\\ w\leq y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{w=y}$

Παρατήρηση

Αν $\leq$ μερική διάταξη στο E
τότε και η $\underline{\leq^{-1}}$ είναι μερική διάταξη στο E.

(απλή)
$\boxed{\text{απόδειξη: Άσκηση}}$

$9 \leq 3$
$3 \geq 9$ • $\geq = (\leq)^{-1}$

Πρόταση

Αν είναι $(E, \preceq)$ μια μερική διατεταγμένο σύνολο και $\emptyset \neq A \subseteq E$: τότε η σχέση $\preceq_A$ είναι μ.δ. στο A.

Απόδειξη (υπεθ. $\preceq_A = \preceq \cap A^2$)

i) $\forall x \in A \subseteq E \overset{\preceq \text{ διατ.}}{\Longrightarrow} (x,x) \in \preceq$
$x \in A \Rightarrow (x,x) \in A^2$ $\Big\} \Rightarrow (x,x) \in \preceq \cap A^2 = \preceq_A$
δηλαδή $\preceq$ ανακλαστική.

ii) Για $(x,y) \in \preceq_A = \preceq \cap A^2 \Rightarrow (x,y) \in \preceq$
$(y,x) \in \preceq_A = \preceq \cap A^2 \Rightarrow (y,x) \in \preceq$ $\Big\} \Rightarrow x = y$ γιατί $\preceq$: αντισυμ.
δηλαδή $\preceq_A$: αντισυμμετρική.

iii) Για $(x,y) \in \preceq_A$
$(y,z) \in \preceq_A$

$(x,y) \in \preceq \cap A^2 \subseteq \preceq$
$(y,z) \in \preceq \cap A^2 \subseteq \preceq$ $\Big| \overset{\preceq: \text{ μεταβατική}}{\Longrightarrow} (x,z) \in \preceq$ (I)

Επίσης $(x,y) \in A^2 \Rightarrow x \in A$
$(y,z) \in A^2 \Rightarrow z \in A$ $\Big\} \Rightarrow (x,z) \in A^2$ (II)

Από (I), (II) έχω ότι $(x,z) \in A^2 \cap \preceq = \preceq_A$
δηλαδή $\preceq$: μεταβατική.

Ορισμός

Αν $\preceq$ είναι μια μ.δ. στο E, ώστε η σχέση $\preceq - \Delta$ καλείται γνήσια διάταξη στο E.

Παραδείγματα

α) $(\mathbb{R}, <)$ γνήσια διάταξη

β) $P(X), \subsetneq$

Ορισμός

Σε ένα σύνολο E, μια διάταξη $\preceq$ με την ιδιότητα

$\forall x, y \in E : x \preceq y$ ή $y \preceq x$

καλείται ολική ή γραμμική διάταξη και το σύνολο E ολικά (γραμμικά) διατεταγμένο.

$A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

Άσκηση: Είναι δυνατόν να ορίσουμε μια ολική διάταξη στο $\mathbb{R}^2$?

Ορισμός

Ας είναι $E, \preceq$ μερικώς διατεταγμένο και $\emptyset \neq A \subseteq E$.
Το $a \in E$ καλείται άνω ή κάτω φράγμα του A
αν $(\forall x \in A): x \preceq a$

$a \preceq x$

$\rightarrow A$: άνω φραγμένο ή (κάτω)

Ένα στοιχείο α ονομάζεται μέγιστο (max) στοιχείο του A αν το α είναι άνω φράγμα του A κ' $a \in A$.
(Ελάχιστο)(min) $\longrightarrow$ κάτω φράγμα

δηλ.: α : ~~άνω φράγμα~~ μέγιστο του A αν $\rightarrow$ $x \preceq \alpha \ \forall x \in A \wedge \alpha \in A$

Ελάχιστο $\alpha \preceq x \ \forall x \in A \wedge \alpha \in A$

Παράδειγμα

16 στοιχεία $E := \{1,2,3,4\}$

$\leftarrow \mathcal{P}(E) \subseteq$

$A \subseteq \mathcal{P}(E)$

$A = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$

Πρόταση

Ας είναι $E, \leq$ ένα διατεταγμένο σύνολο
και $\emptyset \neq A \subseteq E$

Τότε υπάρχει το πολύ ένα άνω (κάτω) φράγμα α του A
με $\underline{\alpha \in A}$

$A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$

άνω φράγμα $\{1,2,3\}$

$\{1,2,3,4\}$

Εδώ δεν υπάρχει άνω φράγμα.